C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, p. 403-406, 1998
Logique/*Logic*

Quelques propriétés-modèle théoriques des groupes spéciaux réduits

Vincent ASTIER

Équipe de logique mathématique, UFR de mathématiques, université Paris VII, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France
Courriel : astier@logique.jussieu.fr
(Reçu le 30 octobre 1997, accepté le 1er décembre 1997)

Résumé. Dans cette Note nous démontrons quelques propriétés du premier ordre des groupes spéciaux réduits. Nous montrons l'omega-catégoricité, la modèle-complétude, et l'omega-stabilité des groupes spéciaux réduits de longueur de chaîne finie, dont nous calculons par ailleurs le rang de Morley (fini). © Académie des Sciences/Elsevier, Paris.

Some model-theoretic properties of reduced special groups

Abstract. *In this Note we prove some first order properties of reduced special groups. We show the ω-categoricity, the model-completeness, and the ω-stability of reduced special groups of finite chain length. Moreover, we compute their (finite) Morley rank.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris.

La théorie des groupes spéciaux (*voir* [3]) est une théorie du premier ordre qui a été développée afin de permettre un traitement au premier ordre de la théorie algébrique des formes quadratiques ; une version de cette dernière est par exemple la théorie des anneaux de Witt abstraits (AWA), eux-mêmes axiomatisation des anneaux de Witt des corps (pour plus de détails et pour les notions et notations de base, *voir* [3], [5] et [6]).

En fait, les groupes spéciaux, avec leurs morphismes, forment une catégorie isomorphe à celle des AWA (*voir* [5]). De plus, la catégorie opposée à celle des espaces d'ordres abstraits (introduits par Marshall comme axiomatisation des espaces d'ordres des corps), est isomorphe à celle des AWA réduits, et à une sous-catégorie des groupes spéciaux : les groupes spéciaux réduits (*voir* [5] à nouveau). Ces isomorphismes de catégories permettent d'utiliser, sans plus de justification, de nombreux résultats concernant les AWA ou les espaces d'ordres abstraits.

Ainsi, les AWA réduits de longueur de chaîne finie étant entièrement décrits dans [6] et [7], cette même description existe pour les groupes spéciaux réduits de longueur de chaîne finie.

Dans cette Note, après avoir rappelé quelques définitions sur les groupes spéciaux, et avoir traduit dans ce contexte certaines notions de [6] et [1], nous allons voir quelques propriétés logiques des groupes spéciaux réduits de longueur de chaîne finie.

Note présentée par Jean-Yves GIRARD.

1. Définitions et notations

Un groupe spécial est un groupe multiplicatif d'exposant deux dans le langage : $L_{SG} = \{1, -1, ., \equiv\}$, où $\equiv$ est la relation d'isométrie entre deux formes de dimension deux, et qui vérifie les axiomes qui apparaissent dans [3] et [5]. Si on note par $D_G\langle a, b\rangle$ l'ensemble des éléments de G représentés par la forme $\langle a, b\rangle$, on a :

$$\langle a, b\rangle \equiv \langle c, d\rangle \iff (ac \in D_G\langle 1, cd\rangle \text{ et } ab = cd) ;$$

ceci nous permet donc d'utiliser indifféremment $\equiv$ ou D pour décrire l'isométrie.

Définition 1. – Un groupe spécial G est *réduit* si : $\forall a\, \langle a, a\rangle \equiv \langle 1, 1\rangle \rightarrow a = 1$.

– La *longueur de chaîne* d'un groupe spécial G, notée $\mathrm{cl}(G)$, est le plus grand entier n tel que : $\exists a_0, \ldots, a_n \in G \quad \forall i < n \quad D_G\langle 1, a_i\rangle \subsetneq D_G\langle 1, a_{i+1}\rangle$ si un tel entier existe, et l'infini sinon.

On connaît essentiellement deux constructions qui permettent, à partir de groupes spéciaux, d'en obtenir d'autres : ce sont le produit, qui est le produit usuel de structures, et l'extension dont voici la description :

Définition 2. – Si G est un groupe spécial dans lequel $-1 \neq 1$, et si H est un groupe d'exposant 2, on définit sur le groupe $G \times H$ une structure de groupe spécial en posant (avec gh désignant un élément de $G \times H$) :

$$D\langle 1, gh\rangle = \begin{cases} \{1, gh\} & \text{si } h \neq 1, \\ D_G\langle 1, g\rangle \times \{1\} & \text{si } h = 1 \text{ et } g \neq -1, \\ G \times H & \text{si } h = 1 \text{ et } g = -1. \end{cases}$$

Le groupe spécial obtenu est appelé *extension de G par H* et est noté $G[H]$.

Lemme 1. – *Avec les notations de la dernière définition, la structure $G[H]$ est un produit généralisé (au sens de* [4]*) de G (comme structure dans le langage L_{SG}), et de H (comme structure dans le langage $\{1, .\}$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_2$, notés multiplicativement).*

La démonstration est une simple vérification, mais il faut rajouter une relation quelconque sur H^+ ; elle ne sert qu'à se placer dans le cadre exact des produits généralisé de Feferman–Vaught, qui exigent que toutes les tructures soient dans le même langage.

Notation. – On note Z_2 le seul groupe spécial réduit avec $-1 \neq 1$ sur le groupe d'exposant 2 à deux éléments (il correspond à l'anneau de Witt $W(\mathbb{R})$).

Définition 3. – Un groupe spécial (pas forcément réduit) construit à partir des groupes spéciaux finis en appliquant un nombre fini de fois les opérations de produit et d'extension est dit de *type fini.*

Un groupe spécial de type fini admet donc une décomposition à partir des groupes spéciaux finis, en utilisant un nombre fini de fois les opérations de produit et d'extension, et d'après [6] cette décomposition est essentiellement unique. De plus, on sait d'après [6] et [7] (*voir* aussi [1], chapitres 6 et 7), et en utilisant les dualités qui apparaissent dans [5], qu'un groupe spécial réduit de longueur de chaîne finie, est un groupe spécial de type fini, obtenu à partir du seul groupe spécial fini Z_2.

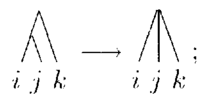
Toujours en utilisant les dualités, on peut construire, pour un groupe spécial G réduit et de longueur de chaîne finie, un arbre qui apparaît dans [1], et qui rend compte de cette décomposition :

– pour tout groupe spécial, G_i, qui apparaît dans la construction de G, on met un point i ;

– on note le produit $G_i \times G_j = G_k$ par :

$$\begin{array}{c} k \\ \wedge \\ i \quad j \end{array} ;$$

– les produits successifs du schéma de gauche se notent comme sur le schéma de droite (associativité) :



– on note l'extension $G_i[H] = G_k$ par :

$$\begin{array}{l} k \\ |\alpha \\ i \end{array}$$

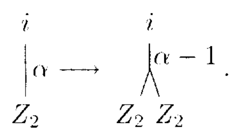
où $\alpha = \dim_{\mathbb{F}_2} H \geq 1$.

On transforme ensuite l'arbre selon les règles suivantes :

– les extensions consécutives se transforment en une seule extension :

$$\begin{array}{l} k \\ |\beta \\ j \\ |\alpha \\ i \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} k \\ \Big| \alpha + \beta ; \\ i \end{array}$$

– les extensions à partir de Z_2 ne sont pas permises. On les remplace comme suit (les groupes spéciaux correspondants étant isomorphes) :



L'*arbre élagué* de G est l'arbre décrit ci-dessus, mais dans lequel, pour les extensions, au lieu de noter un cardinal α à côté des branches verticales de l'arbre, on note $\aleph_0$ si $\alpha \geq \aleph_0$, et α si $\alpha < \aleph_0$.

2. Définissabilité et préservation

Soit G un groupe spécial réduit de longueur de chaîne finie (c'est-à-dire de type fini, voir le paragraphe après la définition 3).

On peut constater que lorsque $G =_{SG} G_1 \times \cdots \times G_n$ est un produit, chaque G_i est définissable (avec paramètres) dans G. De plus, lorsque $G =_{SG} G_1[H]$ et que G_1 n'est pas lui-même une extension, alors G_1 est définissable dans G (sans paramètres).

En particulier, certaines propriétés de la décomposition de G en produits et extensions vont s'exprimer par la satisfaction dans G d'une formule du premier ordre (à paramètres dans G). Ces propriétés seront donc préservées par équivalence élémentaire. De plus, les produits et les extensions étant des produits généralisés, ces opérations vont préserver de nombreuses propriétés-modèle théoriques (*voir* à ce sujet [2], p. 361), ce qui va nous permettre de faire des preuves par récurrence sur l'arbre de G.

3. Applications

Une application de ces récurrences conduit aux résultats suivants :

Proposition 1. – *Si G est un groupe spécial réduit de longueur de chaîne finie, et si $G' \equiv G$, alors $G \equiv_{\infty\omega} G'$ (pour L_{SG}). En particulier, si G est infini, $Th(G)$ est ω-catégorique.*

PROPOSITION 2. – *Pour G_1 et G_2 deux groupes spéciaux réduits de longueur de chaîne finie, on a les équivalences suivantes :*

$$G_1 \equiv G_2 \iff G_1 \equiv_{\infty\omega} G_2 \iff G_1 \text{ et } G_2 \text{ ont même arbre élagué.}$$

PROPOSITION 3. – *Si G est un groupe spécial réduit de longueur de chaîne finie, et $G \subseteq G'$, avec $G \equiv G'$, alors G et G' satisfont les mêmes formules de $\mathrm{L}_{\infty\omega}$ avec un nombre fini de paramètres dans G. En particulier, $Th(G)$ est modèle-complète.*

Remarque. – En revanche, $Th(G)$ peut ne pas être $\aleph_1$-catégorique ; en effet, les deux groupes spéciaux réduits $((((Z_2 \times Z_2)[H_1]) \times Z_2)[H_2]) \times Z_2$ et $((((Z_2 \times Z_2)[H_2]) \times Z_2)[H_1]) \times Z_2$ (dont les arbres s'écrivent facilement) sont élémentairement équivalents car ils ont le même arbre élagué, mais ne sont pas isomorphes (en prenant $\dim_{\mathbb{F}_2} H_1 = \aleph_0$ et $\dim_{\mathbb{F}_2} H_2 = \aleph_1$).

4. Stabilité

Si G est un groupe spécial de type fini, on montre, en remarquant que la relation d'isométrie de G est alors une union finie de cosets de G_4, que $Th(G)$ est ω-stable et de rang de Morley fini. En particulier, G est alors de longueur de chaîne finie, et on établit les implications suivantes (que G soit réduit ou non) : 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 5), avec : 1) G est de type fini, 2) la relation d'isométrie de G est une union finie de cosets, 3) G est ω-stable, 4) G est stable, 5) G est de longueur de chaîne finie.

Et si G est réduit, ces implications sont des équivalences, car on sait qu'un groupe spécial réduit de longueur de chaîne finie, est de type fini (voir le paragraphe après la définition 3).

On peut enfin calculer le rang de Morley de G : quand $G = {}_{SG}\, G_1 \times \cdots \times G_n$ est un produit, on a $\mathrm{RM}(G) = \mathrm{RM}(G_1) + \cdots + \mathrm{RM}(G_n)$, et quand $G = G_1[H]$, où G_1 n'est pas lui-même une extension, on peut montrer que :

$$\mathrm{RM}(G) = \begin{cases} \mathrm{RM}(G_1) + 1 & \text{si } H \text{ est infini,} \\ \mathrm{RM}(G_1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remerciements. Je tiens ici à remercier mon directeur de thèse, Maximo Dickmann.

Références bibliographiques

[1] Andradas C., Bröcker L., Ruiz J., Constructible sets in real geometry, Springer-Verlag, 1996.
[2] Dickmann M., In: Model-Theoretic Logics, Barwise J., Feferman S. (Eds.), Springer-Verlag, 1985.
[3] Dickmann M., Miraglia F., Special groups. Applications of Boolean algebras to the theory of quadratic forms, Paris 7-CNRS, Logique, Prépublication N° 55, 1995.
[4] Feferman S., Vaught R.L., The first order properties of products of algebraic systems, Fund. Math. 47 (1959) 57–103.
[5] Lira de Lima A., Les groupes spéciaux, aspects algébriques et combinatoires de la théorie des espaces d'ordres abstraits, thèse, Université Paris 7, 1996.
[6] Marshall M., Abstract Witt rings, Queens Papers in Pure Appl. Math. 57 (1980).
[7] Marshall M., Spaces of orderings IV, Can. J. Math. 32 (1980) 603–627.