The hitchhiker's guide to . . . tensors, polynomials, and everything

Dirk Werner
Freie Universität Berlin

Galway, 3 May 2018

. . . est omnis divisa in partes tres

- Tensor products

. . . est omnis divisa in partes tres

- Tensor products
- Polynomials on Banach spaces

. . . est omnis divisa in partes tres

- Tensor products
- Polynomials on Banach spaces
- Infinite-dimensional holomorphy

. . . est omnis divisa in partes tres

Freie Universität Berlin

- Tensor products
- Polynomials on Banach spaces
- Infinite-dimensional holomorphy

Ryan, Raymond A.

The Dunford-Pettis property and projective tensor products. (English) Zbl 0656.46057

Bull. Pol. Acad. Sci., Math. 35, No.11-12, 785-792 (1987).

The author addresses the question if the tensor product basis of two shrinking bases in Banach spaces X and Y is shrinking w.r.t. the projective tensor norm (this is known to be the case for the injective tensor norm). He proves the obvious necessary condition "Every operator from X to Y^* is compact" to be sufficient, too, and shows its validity if X has the Dunford-Pettis property. Moreover it is investigated under what conditions the projective tensor product of two Banach spaces fails to contain a copy of ℓ^1. Reviewer: Dirk Werner (Berlin)

Cited in **11** Documents

MSC:

46M05	Tensor products of topological linear spaces
46B22	Radon-Nikodým, Kreĭn-Milman and related properties
46B15	Summability and bases in normed spaces

Keywords:
tensor product basis; shrinking bases; projective tensor norm; injective tensor norm; Dunford-Pettis property

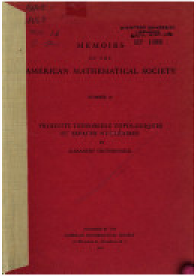
. . . standing on the shoulders of giants (1)

Alexander Grothendieck

Alexander Grothendieck

. . . standing on the shoulders of giants (1)

Alexander Grothendieck



Tensor products

Tensor products

X, Y vector spaces, $B\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ bilinear.

Tensor products

X, Y vector spaces, $B \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ bilinear.
For $x \in X$, $y \in Y$ define $(x \otimes y)(B) = B(x, y)$.

X, Y vector spaces, $B\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ bilinear.
For $x \in X$, $y \in Y$ define $(x \otimes y)(B) = B(x, y)$. This is a linear form.

X, Y vector spaces, $B: X \times Y \to \mathbb{R}$ bilinear.
For $x \in X$, $y \in Y$ define $(x \otimes y)(B) = B(x, y)$. This is a linear form.
Let $X \otimes Y$ be the linear span of all $x \otimes y$ (tensor product of X and Y).

Tensor products

X, Y vector spaces, $B\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ bilinear.
For $x \in X$, $y \in Y$ define $(x \otimes y)(B) = B(x, y)$. This is a linear form.
Let $X \otimes Y$ be the linear span of all $x \otimes y$ (tensor product of X and Y).

Example: $X = L^1[0, 1] = Y$, $X \otimes Y \subset L^1([0, 1] \times [0, 1])$.

Tensor products

X, Y vector spaces, $B \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ bilinear.
For $x \in X$, $y \in Y$ define $(x \otimes y)(B) = B(x, y)$. This is a linear form.
Let $X \otimes Y$ be the linear span of all $x \otimes y$ (tensor product of X and Y).

Example: $X = L^1[0,1] = Y$, $X \otimes Y \subset L^1([0,1] \times [0,1])$.

Universal property: A *bilinear* mapping on $X \times Y$ generates a *linear* mapping on $X \otimes Y$:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \\ & X \otimes Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Tensor products

X, Y vector spaces, $B\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ bilinear.
For $x \in X$, $y \in Y$ define $(x \otimes y)(B) = B(x, y)$. This is a linear form.
Let $X \otimes Y$ be the linear span of all $x \otimes y$ (tensor product of X and Y).

Example: $X = L^1[0,1] = Y$, $X \otimes Y \subset L^1([0,1] \times [0,1])$.

Universal property: A *bilinear* mapping on $X \times Y$ generates a *linear* mapping on $X \otimes Y$:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \\ & X \otimes Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- The tensor product linearises all bilinear maps.

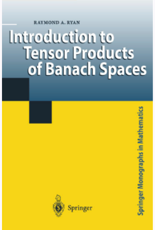
Tensor products

X, Y vector spaces, $B\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ bilinear.
For $x \in X$, $y \in Y$ define $(x \otimes y)(B) = B(x, y)$. This is a linear form.
Let $X \otimes Y$ be the linear span of all $x \otimes y$ (tensor product of X and Y).

Example: $X = L^1[0,1] = Y$, $X \otimes Y \subset L^1([0,1] \times [0,1])$.

Universal property: A *bilinear* mapping on $X \times Y$ generates a *linear* mapping on $X \otimes Y$:

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \\
& X \otimes Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$



- The tensor product linearises all bilinear maps.

Tensor norms

X, Y Banach spaces, $u \in X \otimes Y$.

X, Y Banach spaces, $u \in X \otimes Y$. "Projective" norm on $X \otimes Y$:

$$\|u\|_\pi = \inf\Big\{\sum_{j=1}^n \|x_j\|\,\|y_j\| \colon u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\Big\} = \sup\{|u(B)| \colon B \text{ bilinear form of norm } 1\}$$

X, Y Banach spaces, $u \in X \otimes Y$. "Projective" norm on $X \otimes Y$:

$$\|u\|_\pi = \inf\Big\{\sum_{j=1}^n \|x_j\|\,\|y_j\| \colon u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\Big\} = \sup\{|u(B)| \colon B \text{ bilinear form of norm } 1\}$$

Completion of $X \otimes Y$ for this norm: $X \hat{\otimes}_\pi Y$.

Tensor norms

X, Y Banach spaces, $u \in X \otimes Y$. “Projective” norm on $X \otimes Y$:

$$\|u\|_\pi = \inf\Big\{\sum_{j=1}^n \|x_j\|\,\|y_j\| \colon u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\Big\} = \sup\{|u(B)| \colon B \text{ bilinear form of norm } 1\}$$

Completion of $X \otimes Y$ for this norm: $X \hat{\otimes}_\pi Y$.
Example: $X = L^1[0,1] = Y$, $X \hat{\otimes}_\pi Y = L^1([0,1] \times [0,1])$.

Tensor norms

X, Y Banach spaces, $u \in X \otimes Y$. “Projective” norm on $X \otimes Y$:

$$\|u\|_\pi = \inf\left\{\sum_{j=1}^n \|x_j\|\,\|y_j\| : u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\right\} = \sup\{|u(B)| : B \text{ bilinear form of norm } 1\}$$

Completion of $X \otimes Y$ for this norm: $X \hat{\otimes}_\pi Y$.
Example: $X = L^1[0,1] = Y$, $X \hat{\otimes}_\pi Y = L^1([0,1] \times [0,1])$.

Universal property as before for *continuous* maps:

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \\
& X \otimes Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Tensor norms

X, Y Banach spaces, $u \in X \otimes Y$. "Projective" norm on $X \otimes Y$:

$$\|u\|_\pi = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|\,\|y_j\| : u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \right\} = \sup\{|u(B)| : B \text{ bilinear form of norm } 1\}$$

Completion of $X \otimes Y$ for this norm: $X \hat{\otimes}_\pi Y$.
Example: $X = L^1[0,1] = Y$, $X \hat{\otimes}_\pi Y = L^1([0,1] \times [0,1])$.

Universal property as before for *continuous* maps:

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \\
& X \otimes Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- The projective tensor product linearises all continuous bilinear maps.

Enter RR: Grothendieck's 14 natural tensor norms

Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1952), 1 – 79

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE MÉTRIQUE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES.

par A.Grothendieck (São Paulo).

INTRODUCTION.

1. Contenu du travail.

Ce travail présente une théorie à peu près complète sur le sujet indiqué par son tière, à cela près que nous avons omis la plupart des démonstrations. Sa véritable raison d'être réside dans les résultats du §3 et surtout du §4,nºs 2, 4, 5, résultats tout à fait nouveaux sur les classiques espaces L^1, L^2, L^∞, qui justifient les développements un peu lenge des §§1,2. Les idées directrices résultent de façon asses naturelie de [4](notamment Chap.1, §4,nº6; voir [5] pour un résumé de [4]). ~~En principe~~, ce travail est cependant autonôme et ne demande pas la lecture de [4] et [5]. On peut même remarquer que la théorie des produits tensoriels topologiques d'espaces localement convexes généraux gagne en clarté et simplicité à être exposée d'abord pour les espaces de Banach. (En effet, la lecture de [4] montrera que presque toutes les questions de la théorie générale, y compris la théorie des espaces nucléaires, se ramènent en réalité à des questions sur les espaces de Banach).

Jusqu'au §3, nº4 le texte ne contient presque aucune démonstration. La plupart de ses énoncés relèvent d'une technique asses standard, qui sera bien familière par exemple au lecteur de [4]. Certains résultats-clefs, notamment ceux du §2, nº1, sont traités in extenso dans [4](et les démonstrations se trouvent déjà esquissées dans [5]). Tout au plus la démonstration de certains résultats du § 3 (Notamment le th.2, corollaire 3, et le th.3) ne se borne pas à des redites ou à une morne routine. - Par contre, j'ai donné des démonstrations essentiellement completes pour les résultats fondamentaux difficiles (§3, nº5, th.4 et §4, nº3). Je pense qu'à partir du §3, nº5, tous les raisonnements peuvent être sans difficulté réconstruits par le lecteur attentif, à l'aide des indications détaillées du texte.

Enter RR:
Grothendieck’s 14 natural tensor norms

Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1956), 1 – 79

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE MÉTRIQUE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES.

par A.Grothendieck (São Paulo).

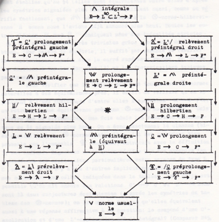
INTRODUCTION.

1. Contenu du travail.

Ce travail présente une théorie à peu près complète sur le sujet indiqué par son titre, à cela près que nous avons omis la plupart des démonstrations. Sa véritable raison d'être réside dans les résultats du §3 et surtout du §4,nºs 2, 4, 5, résultats tout à fait nouveaux sur les classiques espaces L^1, L^2, L^∞, qui justifient les développements un peu longs des §§1,2. Les idées directrices résultent de façon assez naturelle de [4](notamment Chap.1, §4,nº6; voir [5] pour un résumé de [4]). ~~En principe~~, ce travail est cependant autonôme et ne demande pas la lecture de [4] et [5]. On peut même remarquer que la théorie des produits tensoriels topologiques d'espaces localement convexes généraux gagne en clarté et simplicité à être exposée d'abord pour les espaces de Banach. (En effet, la lecture de [4] montrera que presque toutes les questions de la théorie générale, y compris la théorie des espaces nucléaires, se ramènent en réalité à des questions sur les espaces de Banach).

Jusqu'au §3, nº4 le texte ne contient presque aucune démonstration. La plupart de ses énoncés relèvent d'une technique assez standard, qui sera bien familière par exemple au lecteur de [4]. Certains résultats-clefs, notamment ceux du §2, nº1, sont traitées in extenso dans [4] (et les démonstrations se trouvent déjà esquissées dans [5]). Tout au plus la démonstration de certains résultats du §3 (Notamment le th.2, corollaire 3, et le th.3) ne se borne pas à des redites ou à une morne routine. – Par contre, j'ai donné des démonstrations essentiellement completes pour les résultats fondamentaux difficiles (§3, nº5, th.4 et §4, nº3). Je pense qu'à partir du §3, nº5, tous les raisonnements peuvent être sans difficulté réconstruits par le lecteur attentif, à l'aide des indications détaillées du texte.

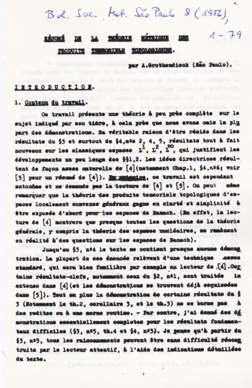
TABLEAU DES ⊗-NORMES NATURELLES.



Explications. – 1. Désignations et factorisations typiques. Nous avons inséré les diverses ⊗-normes usuelles par leur signe usuel ou leurs signes usuels (permettant d'en reconnaitre la formation), ainsi que leur nom. Chaque fois que pour une de ces ⊗-nor-

Enter RR:
Grothendieck's 14 natural tensor norms

Freie Universität Berlin



Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1952), 1-79

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE MÉTRIQUE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES.

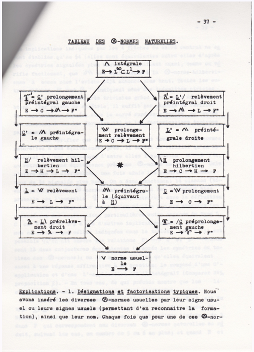
par A. Grothendieck (São Paulo).

INTRODUCTION.

1. Contenu du travail.

Ce travail présente une théorie à peu près complète sur le sujet indiqué par son titre, à cela près que nous avons omis la plupart des démonstrations. Sa véritable raison d'être réside dans les résultats du §5 et surtout du §4, nos 2, 4, 5, résultats tout à fait nouveaux sur les classiques espaces L^1, L^2, L^∞, qui justifient les développements un peu longs des §§1,2. Les idées directrices résultent de façon assez naturelle de [4] (notamment Chap.1, §4, no6; voir [5] pour un résumé de [4]). [illegible], ce travail est cependant autonôme et ne demande pas la lecture de [4] et [5]. On peut même remarquer que la théorie des produits tensoriels topologiques d'espaces localement convexes généraux gagne en clarté et simplicité à être exposée d'abord pour les espaces de Banach. (En effet, la lecture de [4] montrera que presque toutes les questions de la théorie générale, y compris la théorie des espaces nucléaires, se ramènent en réalité à des questions sur les espaces de Banach).

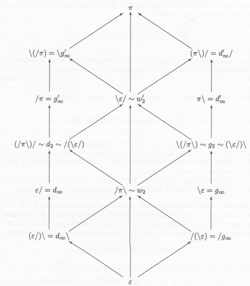
Jusqu'au §5, no4 le texte ne contient presque aucune démonstration. La plupart de ses énoncés relèvent d'une technique assez standard, qui sera bien familière par exemple au lecteur de [4]. Certains résultats-clefs, notamment ceux du §2, no1, sont traités in extenso dans [4] (et les démonstrations se trouvent déjà esquissées dans [5]). Tout au plus la démonstration de certains résultats du §3 (Notamment le th.2, corollaire 3, et le th.3) ne se borne pas à des redites ou à une norme routine. - Par contre, j'ai donné des démonstrations essentiellement completes pour les résultats fondamentaux difficiles (§3, no5, th.4 et §4, no3). Je pense qu'à partir du §3, no5, tous les raisonnements peuvent être sans difficulté réconstruits par le lecteur attentif, à l'aide des indications détaillées du texte.



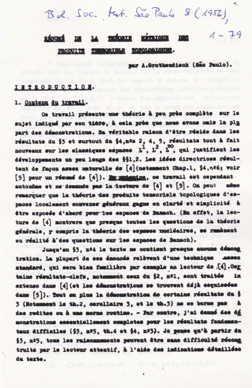
\- 37 -

TABLEAU DES ⊗-NORMES NATURELLES.

Explications. - 1. Désignations et factorisations typiques. Nous avons inséré les diverses ⊗-normes usuelles par leur signe usuel ou leurs signes usuels (permettant d'en reconnaitre la formation), ainsi que leur nom. Chaque fois que pour une de ces ⊗-nor-



Enter RR:
Grothendieck's 14 natural tensor norms



Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1956), 1 - 79

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE MÉTRIQUE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES.

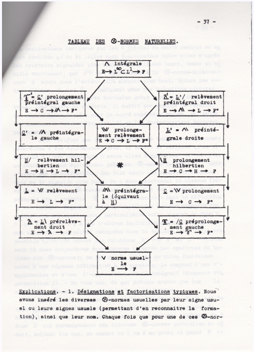
par A. Grothendieck (São Paulo).

INTRODUCTION.

1. Contenu du travail.

Ce travail présente une théorie à peu près complète sur le sujet indiqué par son titre, à cela près que nous avons omis la plupart des démonstrations. Sa véritable raison d'être réside dans les résultats du §3 et surtout du §4, nºs 2, 4, 5, résultats tout à fait nouveaux sur les classiques espaces L^1, L^2, L^∞, qui justifient les développements un peu longs des §§1,2. Les idées directrices résultent de façon assez naturelle de [4] (notamment Chap.1, §4, nº6; voir [5] pour un résumé de [4]). [illegible], ce travail est cependant autonôme et ne demande pas la lecture de [4] et [5]. On peut même remarquer que la théorie des produits tensoriels topologiques d'espaces localement convexes généraux gagne en clarté et simplicité à être exposée d'abord pour les espaces de Banach. (En effet, la lecture de [4] montrera que presque toutes les questions de la théorie générale, y compris la théorie des espaces nucléaires, se ramènent en réalité à des questions sur les espaces de Banach).

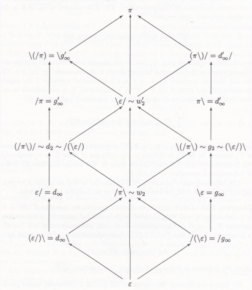
Jusqu'au §3, nº4 le texte ne contient presque aucune démonstration. La plupart de ses énoncés relèvent d'une technique assez standard, qui sera bien familière par exemple au lecteur de [4]. Certains résultats-clefs, notamment ceux du §2, nº1, sont traités in extenso dans [4] (et les démonstrations se trouvent déjà esquissées dans [5]). Tout au plus la démonstration de certains résultats du §3 (Notamment le th.2, corollaire 3, et le th.3) ne se borne pas à des redites ou à une morne routine. - Par contre, j'ai donné des démonstrations essentiellement completes pour les résultats fondamentaux difficiles (§3, nº5, th.4 et §4, nº3). Je pense qu'à partir du §3, nº5, tous les raisonnements peuvent être sans difficulté réconstruits par le lecteur attentif, à l'aide des indications détaillées du texte.



- 37 -

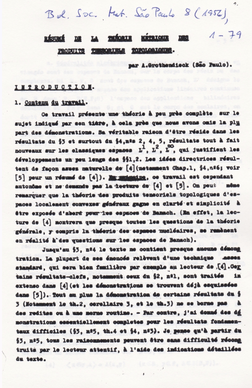
TABLEAU DES ⊗-NORMES NATURELLES.

Explications. - 1. Désignations et factorisations typiques. Nous avons inséré les diverses ⊗-normes usuelles par leur signe usuel ou leurs signes usuels (permettant d'en reconnaitre la formation), ainsi que leur nom. Chaque fois que pour une de ces ⊗-nor-



Théorème fondamental: $\|\,.\,\|_{w_2} \le \|\,.\,\|_{/\pi\backslash} \le K_G \|\,.\,\|_{w_2}$

Enter RR:
Grothendieck’s 14 natural tensor norms



Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1956), 1 - 79

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE MÉTRIQUE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES.

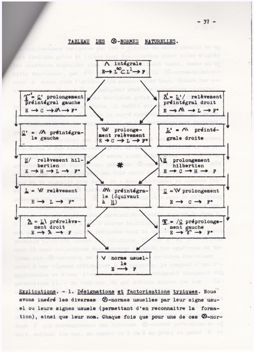
par A.Grothendieck (São Paulo).

INTRODUCTION.

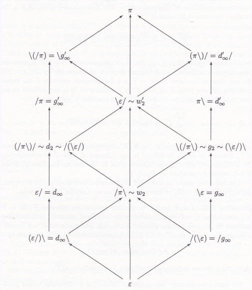
1. Contenu du travail.

Ce travail présente une théorie à peu près complète sur le sujet indiqué par son titre, à cela près que nous avons omis la plupart des démonstrations. Sa véritable raison d'être réside dans les résultats du §3 et surtout du §4, nºs 2, 4, 5, résultats tout à fait nouveaux sur les classiques espaces L^1, L^2, L^∞, qui justifient les développements un peu longs des §§1,2. Les idées directrices résultent de façon assez naturelle de [4] (notamment Chap.1, §4, nº6; voir [5] pour un résumé de [4]). ~~En principe~~, ce travail est cependant autonôme et ne demande pas la lecture de [4] et [5]. On peut même remarquer que la théorie des produits tensoriels topologiques d'espaces localement convexes généraux gagne en clarté et simplicité à être exposée d'abord pour les espaces de Banach. (En effet, la lecture de [4] montrera que presque toutes les questions de la théorie générale, y compris la théorie des espaces nucléaires, se ramènent en réalité à des questions sur les espaces de Banach).

Jusqu'au §3, nº4 le texte ne contient presque aucune démonstration. La plupart de ses énoncés relèvent d'une technique assez standard, qui sera bien familière par exemple au lecteur de [4]. Certains résultats-clefs, notamment ceux du §2, nº1, sont traités in extenso dans [4] (et les démonstrations se trouvent déjà esquissées dans [5]). Tout au plus la démonstration de certains résultats du §3 (Notamment le th.2, corollaire 3, et le th.3) ne se borne pas à des redites ou à une morne routine. - Par contre, j'ai donné des démonstrations essentiellement completes pour les résultats fondamentaux difficiles (§3, nº5, th.4 et §4, nº3). Je pense qu'à partir du §3, nº5, tous les raisonnements peuvent être sans difficulté réconstruits par le lecteur attentif, à l'aide des indications détaillées du texte.



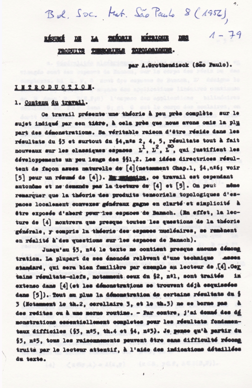
Explications. - 1. Désignations et factorisations typiques. Nous avons inséré les diverses ⊗-normes usuelles par leur signe usuel ou leurs signes usuels (permettant d'en reconnaitre la formation), ainsi que leur nom. Chaque fois que pour une de ces ⊗-nor-



Théorème fondamental: $\| \,.\, \|_{w_2} \leq \| \,.\, \|_{/\pi\backslash} \leq K_G \| \,.\, \|_{w_2}$

First proof “understandable for average mathematicians” (A. Pietsch) by Joram Lindenstrauss and Olek Pełczyński (1968, matrix inequality).

Enter RR:
Grothendieck's 14 natural tensor norms



Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1956), 1-79

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE MÉTRIQUE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES.

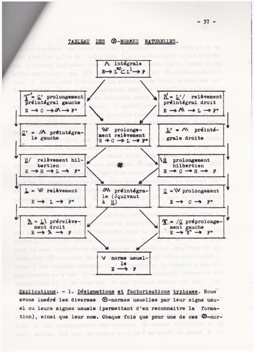
par A.Grothendieck (São Paulo).

INTRODUCTION.

1. Contenu du travail.

Ce travail présente une théorie à peu près complète sur le sujet indiqué par son titre, à cela près que nous avons omis la plupart des démonstrations. Sa véritable raison d'être réside dans les résultats du §3 et surtout du §4,nºs 2, 4, 5, résultats tout à fait nouveaux sur les classiques espaces L^1, L^2, L^∞, qui justifient les développements un peu longs des §§1,2. Les idées directrices résultent de façon assez naturelle de [4](notamment Chap.1, §4,nº6; voir [5] pour un résumé de [4]). [illegible], ce travail est cependant autonôme et ne demande pas la lecture de [4] et [5]. On peut même remarquer que la théorie des produits tensoriels topologiques d'espaces localement convexes généraux gagne en clarté et simplicité à être exposée d'abord pour les espaces de Banach. (En effet, la lecture de [4] montrera que presque toutes les questions de la théorie générale, y compris la théorie des espaces nucléaires, se ramènent en réalité à des questions sur les espaces de Banach).

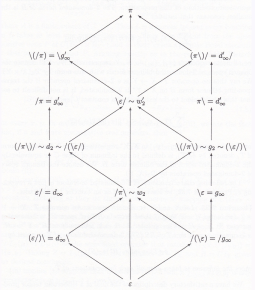
Jusqu'au §3, nº4 le texte ne contient presque aucune démonstration. La plupart de ses énoncés relèvent d'une technique assez standard, qui sera bien familière par exemple au lecteur de [4]. Certains résultats-clefs, notamment ceux du §2, nº1, sont traités in extenso dans [4](et les démonstrations se trouvent déjà esquissées dans [5]). Tout au plus la démonstration de certains résultats du §3 (Notamment le th.2, corollaire 3, et le th.3) ne se borne pas à des redites ou à une morne routine. - Par contre, j'ai donné des démonstrations essentiellement completes pour les résultats fondamentaux difficiles (§3, nº5, th.4 et §4, nº3). Je pense qu'à partir du §3, nº5, tous les raisonnements peuvent être sans difficulté reconstruits par le lecteur attentif, à l'aide des indications détaillées du texte.



- 37 -

TABLEAU DES ⊗-NORMES NATURELLES.

Explications. - 1. Désignations et factorisations typiques. Nous avons inséré les diverses ⊗-normes usuelles par leur signe usuel ou leurs signes usuels (permettant d'en reconnaitre la formation), ainsi que leur nom. Chaque fois que pour une de ces ⊗-nor-



Théorème fondamental: $\|\,.\,\|_{w_2} \le \|\,.\,\|_{/\pi\backslash} \le K_G \|\,.\,\|_{w_2}$

First proof "understandable for average mathematicians" (A. Pietsch) by Joram Lindenstrauss and Olek Pełczyński (1968, matrix inequality).
Nola Alon: "The most important discovery in science in the last 50 years."

Stefan Banach

Stefan Banach

Stefan Banach


MONOGRAFJE MATEMATYCZNE
KOMITET REDAKCYJNY:
S. BANACH, B. KNASTER, K. KURATOWSKI
S. MAZURKIEWICZ, W. SIERPIŃSKI I H. STEINHAUS
TOM I

THÉORIE
DES
OPÉRATIONS LINÉAIRES
PAR
STEFAN BANACH
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE LWÓW

Z SUBWENCJI FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ
WARSZAWA 1932

Homogeneous polynomials

Homogeneous polynomials

Über homogene Polynome in (L^2)

von

S. BANACH (Lwów).

§ 1.

Wir bezeichnen mit E, E' zwei vektorielle, normierte und vollständige Räume. Eine für beliebige $x_1, \ldots, x_n$ aus E erklärte Operation $u(x_1, \ldots, x_n)$, deren Werte dem Raume E' angehören, nennen wir eine *n-lineare Operation*, falls sie stetig und additiv inbezug auf jede der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ ist. Es ist bequem eine derartige Operation mit

$$a x_1 \ldots\ldots x_n \tag{1}$$

zu bezeichnen.

Eine n-lineare Operation $(n > 1)$ heiße *symmetrisch*, wenn sich ihr Wert bei beliebigen Permutationen der Variablen nicht ändert. Werden in einer symmetrischen n-linearen Operation r_1 Variablen gleich z_1, weitere r_2 Variablen gleich $z_2, \ldots$, schließlich die letzten r_k Variablen gleich z_k gesetzt $(r_1 + \ldots + r_k = n)$, so bezeichnen wir die so entstandene Operation mit

$$a z_1^{r_1} \ldots\ldots z_k^{r_k}.$$

Insbesondere ist

$$a z^n = a z \ldots\ldots z\,.$$

Die Operation $a z^n$ nennen wir ein *homogenes Polynom n-ten Grades.* Wie leicht zu sehen, enstehen aus verschiedenen symmetrischen n-linearen Operationen stets verschiedene *homogene Polynome n-ten Grades.*

Als Norm einer n-linearen Operation $a x_1 \ldots x_n$ erklären wir die Zahl

Homogeneous polynomials

Über homogene Polynome in (L^2)

von

S. BANACH (Lwów).

§ 1.

Wir bezeichnen mit E, E' zwei vektorielle, normierte und vollständige Räume. Eine für beliebige $x_1, \dots, x_n$ aus E erklärte Operation $u(x_1, \dots, x_n)$, deren Werte dem Raume E' angehören, nennen wir eine *n-lineare Operation*, falls sie stetig und additiv inbezug auf jede der Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ ist. Es ist bequem eine derartige Operation mit

$$a x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \tag{1}$$

zu bezeichnen.

Eine n-lineare Operation $(n > 1)$ heiße *symmetrisch*, wenn sich ihr Wert bei beliebigen Permutationen der Variablen nicht ändert. Werden in einer symmetrischen n-linearen Operation r_1 Variablen gleich z_1, weitere r_2 Variablen gleich $z_2, \dots$, schließlich die letzten r_k Variablen gleich z_k gesetzt $(r_1 + \dots + r_k = n)$, so bezeichnen wir die so entstandene Operation mit

$$a z_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot z_k^{r_k}.$$

Insbesondere ist

$$a z^n = a z \cdot \ldots \cdot z.$$

Die Operation $a z^n$ nennen wir ein *homogenes Polynom n-ten Grades*. Wie leicht zu sehen, enstehen aus verschiedenen symmetrischen n-linearen Operationen stets verschiedene *homogene Polynome n-ten Grades*.

Als Norm einer n-linearen Operation $a x_1 \dots x_n$ erklären wir die Zahl

Die „Mathematischen Monographien" erscheinen als kartonierte Oktavbände von ungefähr 150 bis 300 Seiten.

Bis jetzt sind erschienen:

Band I. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, VIII+256 Seiten, Preis 3 Dollar U.S.A.
Band II. S. Saks, Théorie de l'intégrale (vergriffen), X+292 Seiten, Preis 4 Dollar U.S.A.
Band III. C. Kuratowski, Topologie I, X+288 Seiten, Preis 4,50 Dollar U.S.A.
Band IV. W. Sierpiński, Hypothèse du continu, VI+194 Seiten, Preis 3,50 Dollar U.S.A.
Band V. A. Zygmund, Trigonometrical Series, IV+332 Seiten, Preis 5 Dollar U.S.A.
Band VI. S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, VI+300 Seiten, Preis 5 Dollar U.S.A.

In Vorbereitung (unter anderen):

S. Banach, Théorie générale des opérations,
C. Kuratowski, Topologie II,
S. Mazur, Allgemeine Limitierungstheorie,
S. Saks, Theory of Integral (englische, neu bearbeitete Auflage),
J. Schauder, Partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus,
A. Tarski, Arithmetik der Kardinalzahlen.

Die Bände sind portofrei gegen eine direkt an

„MONOGRAFJE MATEMATYCZNE"
SEMINAR. MATEMAT. UNIWERS.
WARSZAWA (Polen), OCZKI Nr. 3,

gerichtete Bestellung unter gleichzeitiger Überweisung des Betrages (oder dessen Einzahlung auf das Polnische Postscheckkonto P.K.O. N°45.177 Prof. Dr. K. Kuratowski „Monografje Matematyczne", Warszawa) zu beziehen. Auch in Buchhandlungen erhältlich.

Der Preis dieses Bandes beträgt 5 Dollar U.S.A.

Die Mitglieder der Polnischen Mathematischen Gesellschaft erhalten jeden Band zum Vorzugspreise von 15 zł. (in 3 Monatszahlungen).

Homogeneous polynomials (2)

Homogeneous polynomials (2)

$B\colon X \times X \to Y$ continuous bilinear
$\rightsquigarrow P\colon X \to Y,\ x \mapsto B(x,x)$ continuous 2-homogeneous polynomial

$B\colon X \times X \to Y$ continuous bilinear
$\rightsquigarrow P\colon X \to Y$, $x \mapsto B(x,x)$ continuous 2-homogeneous polynomial

B is not uniquely determined by P, but it is if we require B to be symmetric.

Homogeneous polynomials (2)

$B\colon X \times X \to Y$ continuous bilinear
$\rightsquigarrow P\colon X \to Y,\ x \mapsto B(x,x)$ continuous 2-homogeneous polynomial

B is not uniquely determined by P, but it is if we require B to be symmetric.

Likewise: $B\colon X \times \cdots \times X \to Y$ m-linear, continuous, symmetric
$\rightsquigarrow P\colon X \to Y,\ x \mapsto B(x,\dots,x)$ continuous m-homogeneous polynomial and vice versa

Homogeneous polynomials (2)

$B\colon X \times X \to Y$ continuous bilinear
$\rightsquigarrow P\colon X \to Y$, $x \mapsto B(x,x)$ continuous 2-homogeneous polynomial

B is not uniquely determined by P, but it is if we require B to be symmetric.

Likewise: $B\colon X \times \cdots \times X \to Y$ m-linear, continuous, symmetric
$\rightsquigarrow P\colon X \to Y$, $x \mapsto B(x,\dots,x)$ continuous m-homogeneous polynomial and vice versa

All continuous m-homogeneous polynomials form a Banach space, $\mathcal{P}(^m X;Y)$, under the norm $\|P\| = \sup\{\|P(x)\|\colon \|x\| \le 1\}$.

Enter RR: Symmetric tensor products

Let $\widehat{\bigotimes}_{m,\pi} X = X \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X$.

Let $\widehat{\bigotimes}_{m,\pi} X = X \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X$.
Let $\widehat{\bigotimes}_{s,m,\pi} X$ be the closed linear span of the $x \otimes \cdots \otimes x$ ("symmetric tensor product").

Enter RR: Symmetric tensor products

Let $\widehat{\bigotimes}_{m,\pi} X = X \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X$.
Let $\widehat{\bigotimes}_{s,m,\pi} X$ be the closed linear span of the $x \otimes \cdots \otimes x$ ("symmetric tensor product").

Theorem (RR 1980)

$\widehat{\bigotimes}_{s,m,\pi} X$ linearises all continuous m-homogeneous polynomials:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "P"] \arrow[dr] & & Y \\ & \widehat{\bigotimes}_{s,m,\pi} X \arrow[ur, "\text{linear, cts.}"] & \end{tikzcd}$$

Hahn-Banach theorem: Extension theorem for functionals, not necessarily for operators.

Hahn-Banach theorem: Extension theorem for functionals, not necessarily for operators.

Polynomial version (Aron-Berner): Extension from X to X^{**}.

Hahn-Banach theorem: Extension theorem for functionals, not necessarily for operators.

Polynomial version (Aron-Berner): Extension from X to X^{**}.

- Approach by ultraproducts (RR + Mikael Lindström)

Freie Universität Berlin

Hahn-Banach theorem: Extension theorem for functionals, not necessarily for operators.

Polynomial version (Aron-Berner): Extension from X to X^{**}.

- Approach by ultraproducts (RR + Mikael Lindström)
- Study of extendible polynomials (RR + Pádraigh Kirwan)

Hahn-Banach theorem: Extension theorem for functionals, not necessarily for operators.

Polynomial version (Aron-Berner): Extension from X to X^{**}.

- Approach by ultraproducts (RR + Mikael Lindström)
- Study of extendible polynomials (RR + Pádraigh Kirwan)
- Positive polynomials (RR + Jim Cruickshank, John Loane)

Hahn-Banach theorem: Extension theorem for functionals, not necessarily for operators.

Polynomial version (Aron-Berner): Extension from X to X^{**}.

- Approach by ultraproducts (RR + Mikael Lindström)
- Study of extendible polynomials (RR + Pádraigh Kirwan)
- Positive polynomials (RR + Jim Cruickshank, John Loane)

Aim: Geometric properties of $\mathcal{P}(^m X)$
(RR + Chris Boyd, Bogdan Grecu, Barry Turett)

Hahn-Banach theorem: Extension theorem for functionals, not necessarily for operators.

Polynomial version (Aron-Berner): Extension from X to X^{**}.

- Approach by ultraproducts (RR + Mikael Lindström)
- Study of extendible polynomials (RR + Pádraigh Kirwan)
- Positive polynomials (RR + Jim Cruickshank, John Loane)

Aim: Geometric properties of $\mathcal{P}(^m X)$
(RR + Chris Boyd, Bogdan Grecu, Barry Turett)

- Rotundity of $\mathcal{P}(^m X)$?

Hahn-Banach theorem: Extension theorem for functionals, not necessarily for operators.

Polynomial version (Aron-Berner): Extension from X to X^{**}.

- Approach by ultraproducts (RR + Mikael Lindström)
- Study of extendible polynomials (RR + Pádraigh Kirwan)
- Positive polynomials (RR + Jim Cruickshank, John Loane)

Aim: Geometric properties of $\mathcal{P}(^m X)$
(RR + Chris Boyd, Bogdan Grecu, Barry Turett)

- Rotundity of $\mathcal{P}(^m X)$?
- Smoothness?

Hahn-Banach theorem: Extension theorem for functionals, not necessarily for operators.

Polynomial version (Aron-Berner): Extension from X to X^{**}.

- Approach by ultraproducts (RR + Mikael Lindström)
- Study of extendible polynomials (RR + Pádraigh Kirwan)
- Positive polynomials (RR + Jim Cruickshank, John Loane)

Aim: Geometric properties of $\mathcal{P}(^m X)$
(RR + Chris Boyd, Bogdan Grecu, Barry Turett)

- Rotundity of $\mathcal{P}(^m X)$?
- Smoothness?
- Extreme points

Hahn-Banach theorem: Extension theorem for functionals, not necessarily for operators.

Polynomial version (Aron-Berner): Extension from X to X^{**}.

- Approach by ultraproducts (RR + Mikael Lindström)
- Study of extendible polynomials (RR + Pádraigh Kirwan)
- Positive polynomials (RR + Jim Cruickshank, John Loane)

Aim: Geometric properties of $\mathcal{P}(^m X)$
(RR + Chris Boyd, Bogdan Grecu, Barry Turett)

- Rotundity of $\mathcal{P}(^m X)$?
- Smoothness?
- Extreme points
- Schauder bases

Hahn-Banach theorem: Extension theorem for functionals, not necessarily for operators.

Polynomial version (Aron-Berner): Extension from X to X^{**}.

- Approach by ultraproducts (RR + Mikael Lindström)
- Study of extendible polynomials (RR + Pádraigh Kirwan)
- Positive polynomials (RR + Jim Cruickshank, John Loane)

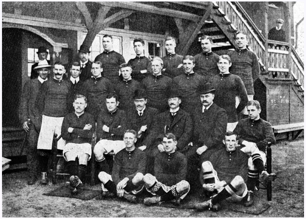
Aim: Geometric properties of $\mathcal{P}(^m X)$
(RR + Chris Boyd, Bogdan Grecu, Barry Turett)

- Rotundity of $\mathcal{P}(^m X)$?
- Smoothness?
- Extreme points
- Schauder bases
- Polynomial Dunford-Pettis property (Ray's first ever paper!)

. . . standing on the shoulders of giants (3)

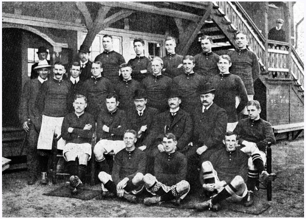
Harald Bohr

Harald Bohr

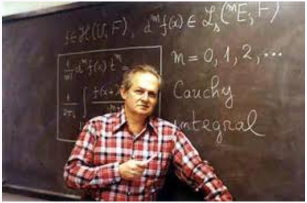


. . . standing on the shoulders of giants (3)

Harald Bohr

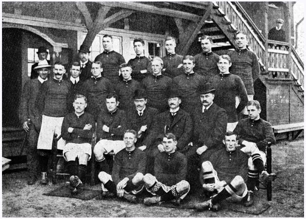


Leopoldo Nachbin

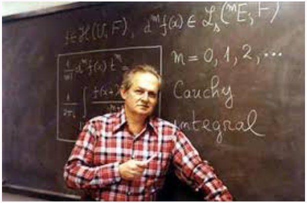


. . . standing on the shoulders of giants (3)

Harald Bohr



Leopoldo Nachbin



A mapping $f\colon X \to Y$ between $\mathbb{C}$-Banach spaces is holomorphic if it is Fréchet differentiable, A mapping $f\colon X \to Y$ between $\mathbb{C}$-Banach spaces is holomorphic if it is Fréchet differentiable, equivalently, if it is continuous and the restriction to every complex line is scalarly holomorphic, i.e., A mapping $f\colon X \to Y$ between $\mathbb{C}$-Banach spaces is holomorphic if it is Fréchet differentiable, equivalently, if it is continuous and the restriction to every complex line is scalarly holomorphic, i.e.,

$$z \mapsto \ell(f(a + zv))$$

is holomorphic on $\mathbb{C}$ for all $a, v \in X$, $\ell \in Y^*$.

Holomorphic mappings

A mapping $f\colon X \to Y$ between $\mathbb{C}$-Banach spaces is holomorphic if it is Fréchet differentiable, equivalently, if it is continuous and the restriction to every complex line is scalarly holomorphic, i.e.,

$$z \mapsto \ell(f(a+zv))$$

is holomorphic on $\mathbb{C}$ for all $a, v \in X$, $\ell \in Y^*$.

Bohr: Holomorphic functions of infinitely many variables; in modern terms $f\colon c_0 \to \mathbb{C}$.

Holomorphic mappings

A mapping $f\colon X \to Y$ between $\mathbb{C}$-Banach spaces is holomorphic if it is Fréchet differentiable, equivalently, if it is continuous and the restriction to every complex line is scalarly holomorphic, i.e.,

$$z \mapsto \ell(f(a+zv))$$

is holomorphic on $\mathbb{C}$ for all $a, v \in X$, $\ell \in Y^*$.

Bohr: Holomorphic functions of infinitely many variables; in modern terms $f\colon c_0 \to \mathbb{C}$.

Nachbin: Spaces of holomorphic mappings and functions.

Taking it to the limit

Taylor expansion for holomorphic f:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x); \qquad P_m \colon X \to Y \ m\text{-homogeneous polynomial.}$$

Taking it to the limit

Taylor expansion for holomorphic f:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x); \qquad P_m\colon X \to Y \ m\text{-homogeneous polynomial.}$$

Radius of uniform convergence: $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[m]{\|P_m\|}}$;
if $r < R$, the series converges uniformly on $\{x\colon \|x\| \le r\}$.

Taylor expansion for holomorphic f:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x); \qquad P_m\colon X \to Y \ m\text{-homogeneous polynomial.}$$

Radius of uniform convergence: $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[m]{\|P_m\|}}$;
if $r < R$, the series converges uniformly on $\{x\colon \|x\| \le r\}$.

Example ($c_0 =$ Banach space of all null sequences with the sup-norm):

$$f\colon c_0 \to \mathbb{C}, \qquad z = (z_m) \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} z_m^m.$$

Taylor expansion for holomorphic f:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x); \qquad P_m \colon X \to Y \ m\text{-homogeneous polynomial.}$$

Radius of uniform convergence: $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[m]{\|P_m\|}}$;
if $r < R$, the series converges uniformly on $\{x \colon \|x\| \le r\}$.

Example ($c_0 =$ Banach space of all null sequences with the sup-norm):

$$f \colon c_0 \to \mathbb{C}, \qquad z = (z_m) \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} z_m^m.$$

Series converges for each $z \in c_0$, but $R = 1$.

Taking it to the limit

Taylor expansion for holomorphic f:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x); \qquad P_m \colon X \to Y \ m\text{-homogeneous polynomial.}$$

Radius of uniform convergence: $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[m]{\|P_m\|}}$;
if $r < R$, the series converges uniformly on $\{x \colon \|x\| \le r\}$.

Example ($c_0 =$ Banach space of all null sequences with the sup-norm):

$$f \colon c_0 \to \mathbb{C}, \qquad z = (z_m) \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} z_m^m.$$

Series converges for each $z \in c_0$, but $R = 1$. f is unbounded on the closed unit ball (take $z = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, 0, \dots)$).

Taking it to the limit

Taylor expansion for holomorphic f:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x); \qquad P_m\colon X \to Y \ m\text{-homogeneous polynomial.}$$

Radius of uniform convergence: $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[m]{\|P_m\|}}$;
if $r < R$, the series converges uniformly on $\{x\colon \|x\| \le r\}$.

Example (c_0 = Banach space of all null sequences with the sup-norm):

$$f\colon c_0 \to \mathbb{C}, \qquad z = (z_m) \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} z_m^m.$$

Series converges for each $z \in c_0$, but $R = 1$. f is unbounded on the closed unit ball (take $z = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, 0, \dots)$).

Therefore, this function is not of *bounded type* (= taking bounded sets to bounded sets).

Enter RR:
Holomorphic maps on Banach spaces

- In-depth study of holomorphic functions on ℓ^1.

- In-depth study of holomorphic functions on ℓ^1.
- In-depth study of weakly compact holomorphic mappings.

- In-depth study of holomorphic functions on ℓ^1.
- In-depth study of weakly compact holomorphic mappings.
- Extensions of holomorphic functions (of bounded type) to the bidual.

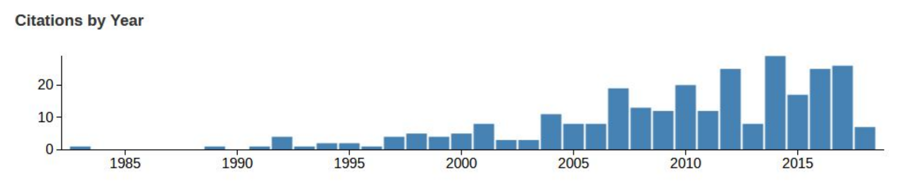
Enter RR:
Holomorphic maps on Banach spaces

- In-depth study of holomorphic functions on ℓ^1.
- In-depth study of weakly compact holomorphic mappings.
- Extensions of holomorphic functions (of bounded type) to the bidual.
- Factorisations of holomorphic mappings.

Enter RR: Holomorphic maps on Banach spaces

- In-depth study of holomorphic functions on ℓ^1.
- In-depth study of weakly compact holomorphic mappings.
- Extensions of holomorphic functions (of bounded type) to the bidual.
- Factorisations of holomorphic mappings.
- Holomorphy vs. real analyticity (RR + Chris Boyd, Nina Snigireva)

- In-depth study of holomorphic functions on ℓ^1.
- In-depth study of weakly compact holomorphic mappings.
- Extensions of holomorphic functions (of bounded type) to the bidual.
- Factorisations of holomorphic mappings.
- Holomorphy vs. real analyticity (RR + Chris Boyd, Nina Snigireva)



. . . standing on the shoulders of Gulliver

. . . standing on the shoulders of Gulliver

I was at the mathematical school, where the master taught his pupils after a method scarcely imaginable to us in Europe. The proposition and demonstration were fairly written on a thin wafer, with ink composed of a cephalic tincture. This the student was to swallow upon a fasting stomach, and for three days following eat nothing but bread and water. As the wafer digested, the tincture mounted to his brain, bearing the proposition along with it. But the success hath not hitherto been answerable, partly by some error in the quantum or composition, and partly by the perverseness of lads, to whom this bolus is so nauseous, that they generally steal aside, and discharge it upwards before it can operate; neither have they been yet persuaded to use so long an abstinence as the prescription requires.